

# 第一章 集合与常用逻辑用语

## 1.1 集合的概念

### 基础必刷

1. C 【解析】对于 A, “很大的实数”的标准不确定, 故不能组成集合, A 错误;

对于 B, 满足不等式  $\sqrt{x+1} < 2$  的所有整数解为有限集  $\{-1, 0, 1, 2\}$ , B 错误;

对于 C, 所有大于 -4 的偶数组成的集合为  $\{a \mid a = 2n, n > -2, n \in \mathbb{Z}\}$ , 为无限集, C 正确;

对于 D, 所有到  $x, y$  轴距离均为 1 的点组成的集合为  $\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$ , 集合中只有 4 个元素, 不是无限集, D 错误. 故选 C.

2. AC 【解析】对于 A, 因为  $\mathbb{N}^*$  表示正整数集, 所以可判断 A 正确;

对于 B, 若  $a = \frac{1}{2}$ , 则满足  $-a \notin \mathbb{N}^*$ , 但  $a \notin \mathbb{N}^*$ , 所以 B 错误;

对于 C, 因为  $\mathbb{N}^*$  表示正整数集, 则  $a+b$  的最小值是 2, 所以 C 正确;

对于 D, 因为  $x^2+4=4x$  的解为  $x_1=x_2=2$ , 则该集合中含有 1 个元素, 所以 D 错误. 故选 AC.

3. B 【解析】对于①,  $\frac{1}{2}$  为有理数, 则  $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$  成立, ①正确;

对于②,  $\sqrt{2}$  为实数, 则  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  不成立, ②错误;

对于③, 0 为自然数,  $0 \in \mathbb{N}$  成立, ③正确;

对于④,  $\pi$  是无理数, 不是整数, 则  $\pi \in \mathbb{Z}$  不成立, ④错误. 故正确的有 2 个. 故选 B.

4. B 【解析】由题意,  $x=2a+b, a \in A, b \in B$ , 则

当  $a=1, b=3$  时,  $x=5$ ;

当  $a=1, b=5$  时,  $x=7$ ;

当  $a=2, b=3$  时,  $x=7$ ;

当  $a=2, b=5$  时,  $x=9$ ;

当  $a=3, b=3$  时,  $x=9$ ;

当  $a=3, b=5$  时,  $x=11$ .

由集合中的元素满足互异性, 得  $C=\{5, 7, 9, 11\}$ , 因此集合 C 中的元素个数为 4.

故选 B.

5. ACD 【解析】0 是元素不是集合,  $\{0\}$  表示以 0 为元素的一个集合, 故 A 错误;

集合  $\{1, 2, 3\}$  与  $\{3, 2, 1\}$  的元素完全相同, 所以是两个相同的集合, 故 B 正确;

方程  $(x-1)^2(x-2)=0$  的所有解组成的集合可表示为  $\{1, 2\}$ , 集合中的元素是互不相同的, 故 C 错误;

集合  $\{x \mid 4 < x < 5\}$  表示大于 4 且小于 5 的全体实数, 有无数个

且无法一一列举出来, 不可以用列举法表示, 故 D 错误. 故选 ACD.

6.  $\{a \mid 0 < a < 2\}$  【解析】 $\because A = \{0, 1\}, B = \{a^2, 2a\}$ , 则  $a \neq 2$  且  $a \neq 0$ ,

$\therefore$  由  $x_1 \in A, x_2 \in B$  可得  $x_1+x_2=a^2, 2a, a^2+1, 2a+1$ .

$\because$  集合  $A * B$  中的最大元素是  $2a+1$ , 且  $a^2 < a^2+1, 2a < 2a+1, \therefore a^2+1 < 2a+1, \therefore 0 < a < 2$ . 因此  $a$  的取值范围是  $\{a \mid 0 < a < 2\}$ .

7.  $\{0, -1, -4\}$  【解析】集合  $A = \{x \mid 4ax^2 + 4(a+2)x - 1 = 0\}$  表示关于  $x$  的方程  $4ax^2 + 4(a+2)x - 1 = 0$  的解集,

因为集合  $A$  中只有一个元素, 所以

当  $4a=0$ , 即  $a=0$  时, 解得  $x=\frac{1}{8}$ , 此时  $A=\{\frac{1}{8}\}$ , 符合题意;

当  $4a \neq 0$  时,  $\Delta = 16(a+2)^2 + 16a = 0$ , 解得  $a=-1$  或  $a=-4$ ,

当  $a=-1$  时  $A=\{\frac{1}{2}\}$ , 当  $a=-4$  时  $A=\{-\frac{1}{4}\}$ , 均符合题意.

综上可得,  $a$  的所有可能取值组成的集合为  $\{0, -1, -4\}$ .

### 刷易错

#### 易错点 1 不能正确理解集合的表示方法

8. B 【解析】对于 A,  $M = \{(3, 2)\}, N = \{(2, 3)\}$ , 集合  $M$  与  $N$  均表示点的集合, 而点  $(3, 2)$  与点  $(2, 3)$  不同, 故不是同一集合, 故 A 错误; 对于 B,  $M = \{2, 3\}, N = \{3, 2\}$ , 根据集合中元素的无序性, 可知集合  $M, N$  表示同一集合, 故 B 正确; 对于 C,  $M = \{(x, y) \mid x+y=1\}$ , 集合  $M$  表示点的集合,  $N = \{y \mid x+y=1\}$ ,  $N$  表示直线  $x+y=1$  上所有点的纵坐标, 是数集, 故不是同一集合, 故 C 错误; 对于 D, 由于集合  $M = \{y \mid y=x^2\}$  的代表元素是  $y$ , 而  $y$  为函数  $y=x^2$  的函数值, 故  $M = \{y \mid y=x^2\} = \{y \mid y \geq 0\}$ , 集合  $N = \{x \mid y=x^2\}$  的代表元素是  $x$ , 而  $x$  为函数  $y=x^2$  的自变量, 故  $N = \{x \mid y=x^2\} = \mathbb{R}$ , 故不是同一集合, 故 D 错误. 故选 B.

9.  $\{1, 3, 4\}$  【解析】当  $x=0$  时, 可得  $\frac{4}{5-0} = \frac{4}{5} \notin \mathbb{N}$ , 不符合题意;

当  $x=1$  时, 可得  $\frac{4}{5-1} = 1 \in \mathbb{N}$ , 符合题意;

当  $x=2$  时, 可得  $\frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$ , 不符合题意;

当  $x=3$  时, 可得  $\frac{4}{5-3} = 2 \in \mathbb{N}$ , 符合题意;

当  $x=4$  时, 可得  $\frac{4}{5-4} = 4 \in \mathbb{N}$ , 符合题意;

当  $x=5$  时, 显然不成立;

当  $x \geq 6, x \in \mathbb{N}$  时, 可得  $\frac{4}{5-x} < 0$ , 不符合题意.

所以集合  $\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{4}{5-x} \in \mathbf{N}\right\}$  可以用列举法表示为集合  $\{1, 3, 4\}$ .

**易错警示** 用描述法表示集合时,首先要明确集合中的元素是什么,即看竖线前的代表元素,其次看代表元素满足的属性,根据描述的元素具有的属性确定其元素构成,如本题代表元素是  $x$ ,元素属性是  $x \in \mathbf{N}$  且  $\frac{4}{5-x} \in \mathbf{N}$ ,此外还要注意  $\mathbf{N}$  表示自然数集,包括 0,这也是易错点.

## 易错点 2 忽视集合中元素的性质而致误

**10.3 【解析】** 当  $t=2$  时,  $t^2-4t+5=4-8+5=1$ , 故不符合题意;  
当  $t^2-4t+5=2$  时,  $t^2-4t+3=0$ , 化简可得  $(t-3)(t-1)=0$ , 则  $t=3$  ( $t=1$  不合题意舍去).

**易错警示** 根据元素与集合的关系求解集合中的参数问题,求出参数的值后要检验是否满足集合中元素的互异性.

## 易错点 3 不能正确理解元素与集合的关系而致误

**11.C 【解析】** 对于 A,  $\because$  集合  $A = \{t^2+s^2 \mid t, s \in \mathbf{Z}\}$ ,  $\therefore 1 \in A, 2 \in A, \therefore 1+2=3 \notin A$ ,  $\therefore$  A 选项“ $x+y \in A$ ”错误. 对于 B,  $\because 1-2=-1 \notin A$ ,  $\therefore$  B 选项“ $x-y \in A$ ”错误. 对于 D,  $\because \frac{1}{2} \notin A$ ,  $\therefore$  D 选项“ $\frac{x}{y} \in A$ ”错误. 对于 C, 由  $x \in A, y \in A$ , 设  $x=t_1^2+s_1^2, y=t_2^2+s_2^2$ , 且  $t_1, s_1, t_2, s_2 \in \mathbf{Z}$ , 则  $xy = (t_1^2+s_1^2)(t_2^2+s_2^2) =$

$(t_1 t_2)^2 + (t_1 s_2)^2 + (s_1 t_2)^2 + (s_1 s_2)^2 = (t_1 t_2)^2 + 2t_1 t_2 s_1 s_2 + (s_1 s_2)^2 + (t_1 s_2)^2 - 2t_1 t_2 s_1 s_2 + (s_1 t_2)^2 = (t_1 t_2 + s_1 s_2)^2 + (t_1 s_2 - s_1 t_2)^2$ . 又  $t_1 t_2 + s_1 s_2 \in \mathbf{Z}, t_1 s_2 - s_1 t_2 \in \mathbf{Z}, \therefore xy \in A, C$  选项正确. 故选 C.

**12. ABD 【解析】** A 选项:  $0=0+0 \times \sqrt{2}$ , 且  $a=0 \in \mathbf{Z}, b=0 \in \mathbf{Z}, \therefore 0 \in A$ , 故 A 正确;

B 选项:  $a+\sqrt{2}b=1+2\sqrt{2}$ , 且  $a=1 \in \mathbf{Z}, b=2 \in \mathbf{Z}, \therefore 1+2\sqrt{2} \in A$ , 故 B 正确;

C 选项:  $a+\sqrt{2}b=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $a=1 \in \mathbf{Z}, b=\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}, \therefore 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$ , 故 C 不正确;

D 选项:  $a+\sqrt{2}b=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$ , 且  $a=3 \in \mathbf{Z}, b=2 \in \mathbf{Z}, \therefore \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \in A$ , 故 D 正确.

故选 ABD.

**易错警示** 判断元素与集合的关系,关键是判断元素是否满足集合中元素的一般属性.例如,本题求解的关键是在  $x=a+\sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Z}$  的前提下,判断  $0, 1+2\sqrt{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$  是否能够写成集合 A 中元素的表示形式,这就需要推理验证,但是作为选择题,可以通过逐个取值排除选项.

## 1.2 集合间的基本关系

### 基础必刷

**1.D 【解析】** 由题意,  $C = \{2, 3, 4, 5\}$ , 故其子集可以是  $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$ , 其子集的个数为 16. 故选 D.

**快解** 由题意,  $C = \{2, 3, 4, 5\}$  有 4 个元素, 其子集的个数为  $2^4 = 16$ . 故选 D.

**2.D 【解析】** 由题意得,  $A = \{x \mid x^2 = x\} = \{0, 1\}$ .  
 $\{\emptyset\}$  是以空集为元素的集合, 不是集合 A 的子集, 故 A 错误;  
 $\{1\} \neq A$ , 故 B 错误;  $-1 \notin A$ , 故 C 错误;  $0 \in A$ , 则  $\{0\} \subseteq A$ , 故 D 正确. 故选 D.

**3.A 【解析】** (1)  $\{0\}$  不是空集, 故 (1) 错误;  
(2) 因为  $\left\{x \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Q}\right\}$ , 若  $x$  是分子为 1, 分母为正整数的分数, 则  $x \in \mathbf{Q}, \frac{6}{x} \in \mathbf{N}$ , 所以  $\left\{x \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Q}\right\}$  为无限集, 故 (2) 错误;

(3) 因为空集的子集是空集, 故 (3) 错误;

(4) 因为  $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$  表示由奇数组成的集合,  $\{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$  也表示由奇数组成的集合, 所以  $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\} = \{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$ , 故 (4) 正确. 故选 A.

**4.A 【解析】** 由题意知集合  $A = \{x \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} = \{-4, 1\}$ ,  
对于方程  $x^2 + (a+1)x - (a+2) = 0$ , 其判别式  $\Delta = (a+1)^2 + 4(a+2) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0$  恒成立, 所以方程恒有解, 可解得  $x_1 = -a-2, x_2 = 1$ .  
①当  $-a-2=1$ , 即  $a=-3$  时,  $B \subseteq A$  成立;  
②当  $-a-2 \neq 1$ , 即  $a \neq -3$  时, 因为  $B \subseteq A$ , 所以  $-a-2=-4$ , 解得  $a=2$ .  
综上所述, 实数  $a$  的取值集合为  $\{-3, 2\}$ . 故选 A.

**5. ABD 【解析】** 根据题意,  $ax^2+x+a=0$  只有一个实数根.

当  $a=0$  时,  $ax^2+x+a=0$  化为  $x=0$ , 所以  $b=0$ .

当  $a \neq 0$  时,  $\Delta = 1-4a^2=0$ , 则  $a = \pm \frac{1}{2}$ .

若  $a = \frac{1}{2}$ , 则  $ax^2+x+a=0$  的解集为  $\{-1\}$ , 所以  $b=-1$ ;

若  $a = -\frac{1}{2}$ , 则  $ax^2 + x + a = 0$  的解集为  $\{1\}$ , 所以  $b = 1$ . 故选 ABD.

- 6. A** 【解析】根据题意,  $\{1, 2, 3\}$  是集合  $M$  的子集, 集合  $M$  是集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的子集, 符合题意的集合  $M$  为  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 共 8 个. 故选 A.

**快解** 由题意, 满足  $\{1, 2, 3\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的集合  $M$  的个数是  $2^{6-3} = 8$ . 故选 A.

### 刷易错

#### 易错点 1 混淆集合与元素、集合与集合之间的关系而致误

- 7. C** 【解析】因为  $M = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x-2} \leq 0\right\} = \{0, 1\}$ , 所以  $0 \in M$ , A 错误;  $2 \notin M$ , B 错误;  $\{1\} \subseteq M$ , C 正确;  $1 \in M$ , D 错误. 故选 C.

- 8. C** 【解析】根据任何一个集合都是它本身的子集可知①正确; 根据集合中元素的无序性可知②正确; 根据元素与集合之间才有“属于”或“不属于”的关系可知④正确, ⑤错误; 根据空集是任何集合的子集可知③错误, ⑥正确. 所以正确的关系式的个数为 4, 故选 C.

**易错警示** 元素与集合之间是“属于”或“不属于”的关系, 集合与集合之间是“包含”“真包含”以及“不包含”“相等”的关系. 而只有  $\emptyset$  与  $\{\emptyset\}$  之间既可以是“属于”, 也可以是“包含”的关系.

#### 易错点 2 含参数的子集与真子集之间忽视空集而致误

- 9.  $\{a \mid a \leq -3 \text{ 或 } 1 \leq a < 2\}$**

【思路分析】由题意可得  $B \subseteq A$ , 分  $B = \emptyset$  和  $B \neq \emptyset$  两种情况, 分别求出实数  $a$  的取值范围, 得出结论.

【解析】当  $B = \emptyset$  时, 满足  $B \subseteq A$ , 此时  $a \geq 2a+3$ , 解得  $a \leq -3$ ;

$$\text{当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 要使 } B \subseteq A, \text{ 只需 } \begin{cases} a < 2a+3, \\ a \geq 1, \\ 2a+3 < 7, \end{cases} \text{ 解得 } 1 \leq a < 2.$$

所以实数  $a$  的取值范围为  $\{a \mid a \leq -3 \text{ 或 } 1 \leq a < 2\}$ .

### 易错警示

因为空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 所以当含参集合是另一个确定集合的子集或真子集时, 要考虑含参集合是空集的情况, 在本题中,  $B$  集合未确定, 因此需要对  $B$  是否为空集进行分类讨论.

#### 易错点 3 求解含参数的集合相等问题时忽视集合中元素属性的检验致误

- 10. -1** 【解析】因为  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 所以  $A = B$ ,

$$\text{而集合 } A = \left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}, B = \{a^2, a+b, 0\},$$

$$\text{则 } a \neq 0, a \neq 1, \text{ 则 } \frac{b}{a} = 0, \text{ 得 } b = 0, \text{ 则 } a^2 = 1, \text{ 得 } a = -1,$$

$$\text{故 } a^{2^{023}} + b^{2^{023}} = (-1)^{2^{023}} = -1.$$

### 易错警示

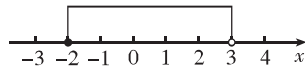
求解含参数的集合相等问题, 一定要检验所求参数是否满足集合中元素的互异性, 否则会造成增解.

## 1.3 集合的基本运算

### 基础必刷

- 1. C** 【解析】由题意得  $M \cup N = \{x \mid -3 < x < 4\}$ . 故选 C.
- 2. C** 【解析】由题意得, 集合  $S = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,  $T = \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\}$ , 所以  $T \subseteq S$ , 则  $S \cap T = T$ . 故选 C.
- 3. B** 【解析】因为  $A \cap B = \{5\}$ ,  $A \cap (\complement_U B) = \{2, 3, 6\}$ , 可知  $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ,  $\complement_U A = \{4, 7, 8\}$ , 且  $5 \in B$ ,  $2 \notin B$ ,  $3 \notin B$ ,  $6 \notin B$ , 所以  $(\complement_U A) \cup B = \{4, 5, 7, 8\}$ . 故选 B.
- 4. B** 【解析】由题图可知, 阴影部分对应的集合的元素  $x \notin S$ ,  $\therefore x \in \complement_U S$ , 且  $x \in M \cap P$ , 因此  $x \in (M \cap P) \cap (\complement_U S)$ . 故选 B.
- 5. A** 【解析】由集合  $A = \{1, 2, m\}$ ,  $B = \{1, \sqrt{m}\}$ ,  $A \cup B = A$  可得  $B \subseteq A$ . 若  $\sqrt{m} = 2$ , 则  $m = 4$ , 所以  $B = \{1, 2\}$ ,  $A = \{1, 2, 4\}$ , 显然成立. 若  $\sqrt{m} = m$ , 则  $m = 0$  或  $m = 1$ , 当  $m = 0$  时, 显然成立; 当  $m = 1$  时,  $A = \{1, 2, 1\}$ ,  $B = \{1, 1\}$  不满足集合中元素的互异性, 故舍去. 综上所述, 实数  $m$  的值为 0 或 4. 故选 A.

- 6. C** 【解析】 $\because$  全集为  $\mathbb{R}$ ,  $M = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ,  $\therefore \complement_{\mathbb{R}} M = \{x \mid -2 \leq x < 3\}$ . 又  $N = \{x \mid x - a \leq 0\} = \{x \mid x \leq a\}$ ,  $N \cap (\complement_{\mathbb{R}} M) = \emptyset$ , 在数轴上表示出集合  $\complement_{\mathbb{R}} M$ ,



则结合数轴可知, 当  $a < -2$  时,  $N \cap (\complement_{\mathbb{R}} M) = \emptyset$ , 故  $a$  的取值范围为  $\{a \mid a < -2\}$ , 故选 C.

- 7. AD** 【解析】 $U = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , 又  $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $(\complement_U A) \cap B = \{2, 8, 9, 10\}$ , 所以  $A \cap B = \{0, 4, 6\}$ ,  $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A \cup B$  的子集个数为  $2^{11} = 2048$ ,  $A \cap B$  的子集有 8 个, 则非空真子集有 6 个, 故 A, D 正确. 故选 AD.

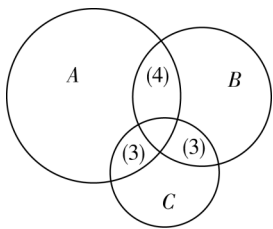
- 8.  $\{a \mid a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 3\}$**  【解析】由题可知,  $A \neq \emptyset$ .

$$\text{若 } A \cap B = \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} a-1 > 0, \\ a+2 < 5, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < a < 3.$$

所以当  $A \cap B \neq \emptyset$  时,  $a \leq 1$  或  $a \geq 3$ .

所以实数  $a$  的取值范围为  $\{a \mid a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 3\}$ .

9.2 【解析】根据题意, 设  $A = \{x | x \text{ 是参加 100 米比赛的同学}\}$ ,  $B = \{x | x \text{ 是参加 400 米比赛的同学}\}$ ,  $C = \{x | x \text{ 是参加 1 500 米比赛的同学}\}$ ,



则  $\text{card}(A) = 8, \text{card}(B) = 7, \text{card}(C) = 5$ ,  
且  $\text{card}(A \cap B) = 4, \text{card}(A \cap C) = 3, \text{card}(B \cap C) = 3$ ,  
则  $\text{card}(A \cap B \cap C) = 12 - [(8+7+5) - (4+3+3)] = 2$ ,  
所以三项比赛都参加的有 2 人.

### 刷易错

#### 易错点 1 两集合运算, 忽视集合的代表元素

10.  $\{(0, 1)\}$  【解析】集合  $M = \{(x, y) | y = x + 1\}$  与  $N = \{(x, y) | y = -x + 1\}$  均为点集,  $M \cap N$  表示直线  $y = x + 1$  与直线  $y = -x + 1$  的交点构成的集合. 由  $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 1 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases}$  所以  $M \cap N = \{(0, 1)\}$ .

**易错警示** 求两集合的交集运算时, 首先应明确集合的代表元素是实数还是点的坐标还是其他的一些元素, 本题中两集合的代表元素是点的坐标, 因此本题的答案是  $\{(0, 1)\}$ , 而不是  $\{0, 1\}$ .

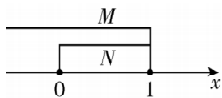
11.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$  【解析】 $A = \{x | |x - 1| \leq 1\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ,

由  $B$  中  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  得  $1 - x > 0$ , 解得  $x < 1$ .

$\therefore$  全集  $U = \mathbf{R}, \therefore \complement_U B = \{x | x \geq 1\}$ ,

故  $A \cap (\complement_U B) = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ .

12.  $\{x | x < 0\} \quad \{x | x \geq 0\}$  【解析】在数轴上表示出集合  $M, N$ , 如图.



所以  $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\} = \{x | x < 0\}, \complement_{\mathbf{R}}(M - N) = \{x | x \geq 0\}$ .

**易错警示** 本题的易错点是集合  $M$  与  $N$  中的代表元素一个是  $x$ , 另一个是  $y$ , 从而错误地认为它们之间没有任何关系, 进而认为  $M - N = M$ . 产生这种错误的原因是不能正确理解集合表示方法的内涵.

#### 易错点 2 不能正确利用性质进行转化而致误

13. C 【解析】 $\because A \cap B = B, \therefore B \subseteq A, \therefore m^2 = 9$  或  $m^2 = m$ ,  
 $\therefore m = \pm 3$  或  $m = 0$  或  $m = 1$ .

当  $m = -3$  时,  $A = \{1, 9, -3\}, B = \{9, 1\}$ , 符合题意;

当  $m = 3$  时,  $A = \{1, 9, 3\}, B = \{9, 1\}$ , 符合题意;

当  $m = 0$  时,  $A = \{1, 9, 0\}, B = \{0, 1\}$ , 符合题意;

当  $m = 1$  时,  $A = \{1, 9, 1\}, B = \{1, 1\}$ , 不满足集合中元素的互异性, 不符合题意.

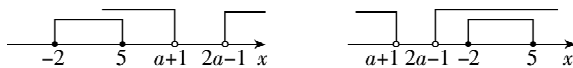
$\therefore$  满足条件的实数  $m$  的值是 0, 3, -3. 故选 C.

**易错警示** 求解本题的关键是将  $A \cap B = B$  转化为  $B \subseteq A$ , 并且求出  $m$  的值后要检验是否满足集合中元素的互异性.

14.  $\{a | a < 2 \text{ 或 } a > 4\}$  【解析】 $\because A \cap (\complement_U B) = A, \therefore A \subseteq \complement_U B$ . 若  $B = \emptyset$ , 则  $a + 1 > 2a - 1$ , 即  $a < 2$ , 此时  $\complement_U B = \mathbf{R}, A \subseteq \complement_U B$  符合题意. 若  $B \neq \emptyset$ , 则  $a + 1 \leq 2a - 1$ , 即  $a \geq 2$ , 此时  $\complement_U B = \{x | x < a + 1 \text{ 或 } x > 2a - 1\}$ .

由于  $A \subseteq \complement_U B$ , 如图, 则  $\begin{cases} a \geq 2, \\ a + 1 > 5 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a \geq 2, \\ 2a - 1 < -2, \end{cases}$  解得  $a > 4$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $\{a | a < 2 \text{ 或 } a > 4\}$ .



**易错警示** 求解本题的关键是将  $A \cap (\complement_U B) = A$  转化为  $A \subseteq \complement_U B$ , 注意不要忘记讨论集合  $B$  为空集 (此时  $\complement_U B = \mathbf{R}$ ) 的特殊情况.

## 1.4 充分条件与必要条件

### 基础必刷

1. B 【解析】(1) 是一个感叹句, 不能判断真假, 故不是命题;  
(2) 0 是自然数, 显然这句话是对的, 因此是命题, 而且是真命题;  
(3) 因为  $a^2 + 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$  是正确的, 所以  $a^2 + 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$  是命题, 而且是真命题;  
(4) 不能判断  $x > 3$  是否正确, 所以  $x > 3$  不是命题.  
综上, 只有 (2) (3) 是命题. 故选 B.

2. B 【解析】设一元二次方程  $x^2 - mx + m + 1 = 0$  的两个正实根分别为  $x_1, x_2$ ,

由题意可得  $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m + 1) \geq 0, \\ x_1 + x_2 = m > 0, \\ x_1 x_2 = m + 1 > 0, \end{cases}$  解得  $m \geq 2 + 2\sqrt{2}$ .

因为  $\{m | m > 2\} \subsetneq \{m | m \geq 2 + 2\sqrt{2}\}$ ,

所以“ $m > 2$ ”是“一元二次方程  $x^2 - mx + m + 1 = 0$  有两个正实根”的必要不充分条件. 故选 B.

3. A 【解析】由  $2x - 1 > 0$ , 可得  $x > \frac{1}{2}$ .

因为  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 所以  $\{x | x > m\} \subsetneq \left\{x \left| x > \frac{1}{2} \right.\right\}$ ,

故  $m > \frac{1}{2}$ . 故选 A.

4. B 【解析】 $\because 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, \therefore -1 \leq x+y \leq 1$ , 即“ $-1 \leq$

$x+y \leq 1$ ”是“ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ”的必要条件.

$\therefore -1 \leq x+y \leq 1, \therefore$  当  $x=-1, 0 \leq y \leq 2$  时满足此不等式,

$\therefore$  “ $-1 \leq x+y \leq 1$ ”不是“ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ”的充分条件.

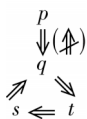
故“ $-1 \leq x+y \leq 1$ ”是“ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ”的必要不充分条件,

故选 B.

5. C 【解析】由  $ab+4=2a+2b$  可得  $(a-2)(b-2)=0$ , 所以  $a=2$  或  $b=2$ , 则  $a, b$  中至少有一个为 2. 故选 C.

6. C 【解析】杜牧认为没有东风, 则赤壁之战东吴将输给曹操, 则说明东风是打败曹操的必要条件. 但有了东风, 若没有其他的地利人和, 也未必能打败曹操, 故东风不是充要条件, 即“东风”是“赤壁之战东吴打败曹操”的必要不充分条件. 故选 C.

7. BD 【解析】由题意可知,  $p, q, s, t$  之间的逻辑关系如图所示, 则  $p \Rightarrow q \Rightarrow t, t \not\Rightarrow p$ , 因此  $t$  是  $p$  的必要不充分条件, A 选项错误;



$t \Rightarrow s \Rightarrow q, q \Rightarrow t$ , 所以  $t$  是  $q$  的充要条件, B 选项正确;

$p \Rightarrow q \Rightarrow t \Rightarrow s, s \not\Rightarrow p$ , 因此  $p$  不是  $s$  的充要条件, C 选项错误;

$q \Rightarrow t \Rightarrow s, s \Rightarrow q$ , 所以  $q$  是  $s$  的充要条件, D 选项正确. 故选 BD.

8. ABC 【解析】题图①中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 亮; 而灯泡 B 亮时, 开关 A 不一定闭合, 故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充分不必要条件, 因此选项 A 正确. 题图②中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 不一定亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 必须闭合, 故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要不充分条件, 因此选项 B 正确. 题图③中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 必须闭合, 所以开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充要条件, 因此选项 C 正确. 题图④中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 不一定亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 不一定闭合, 所以开关 A 闭合是灯泡 B 亮的既不充分也不必要条件, 因此选项 D 错误.

9. {1} 【解析】因为  $p$  是  $q$  的必要条件,

所以  $\{x | 1 < x < 3\} \subseteq \{x | m < x < m+2\}$ ,

所以  $\begin{cases} m+2 \geq 3, \\ m \leq 1, \end{cases}$  解得  $m=1$ ,

则实数  $m$  的取值范围是  $\{1\}$ .

### 刷易错

#### 易错点 1 条件判断不全面而致误

10. A 【解析】当  $a=b=c=0$  时, 实数  $a, b, c$  满足  $2b=a+c$ , 但此

时  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2$  不成立;

反过来  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2$  能推出  $a+c=2b$ , 实数  $a, b, c$  满足

$2b=a+c$ . 故甲是乙的必要不充分条件.

### 易错警示

充分、必要条件的判断问题, 若直接判断条件与结论之间的关系, 需要严格推理论证, 如果考虑问题不全面, 则会造成错解, 如本题中若忽视了  $b=0$  的情况, 则会造成错解.

11. B 【解析】集合  $M = \{x | ax^2 - x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$  仅有 1 个真子集, 即集合  $M$  中只有一个元素.

若  $a=0$ , 方程  $ax^2 - x + 2 = 0$  等价于  $-x + 2 = 0$ , 解得  $x=2$ , 满足条件;

若  $a \neq 0$ , 方程  $ax^2 - x + 2 = 0$  要满足  $\Delta = 1 - 8a = 0$ , 解得  $a = \frac{1}{8}$ .

则集合  $M = \{x | ax^2 - x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$  仅有 1 个真子集, 此时  $a=0$  或  $a = \frac{1}{8}$ .

因为  $a = \frac{1}{8}$  时满足集合  $M$  仅有 1 个真子集, 集合  $M$  仅有 1 个真子集时不一定有  $a = \frac{1}{8}$ ,

所以“ $a = \frac{1}{8}$ ”是“集合  $M$  仅有 1 个真子集”的充分不必要条件. 故选 B.

### 易错警示

本题判断充分条件与必要条件时, 由真子集个数得到集合  $M$  只有一个元素, 需要分  $a=0$  和  $a \neq 0$  两种情况判断, 否则会因讨论不全而致误.

#### 易错点 2 不能正确理解条件与结论之间的关系而致误

12. AB 【解析】因为关于  $x$  的方程  $mx^2 + 2x + 1 = 0$  有两个不相等的实数解,

所以当  $m=0$  时,  $2x+1=0$  只有 1 个实数解, 显然不满足题意;

当  $m \neq 0$  时,  $\Delta = 4 - 4m > 0$ , 解得  $m < 1$ ,

综上,  $m < 1$  且  $m \neq 0$ , 即  $mx^2 + 2x + 1 = 0$  有两个不相等的实数解等价于  $m < 1$  且  $m \neq 0$ , 即  $m < 0$  或  $0 < m < 1$ .

要使得选项  $m$  的范围是题设条件的充分条件,

则选项  $m$  的范围对应的集合是  $\{m | m < 0 \text{ 或 } 0 < m < 1\}$  的子集,

经检验, A, B 满足要求, C, D 不满足要求.

故选 AB.

13. AD 【解析】由  $-\frac{11}{2} < 5x - 3 < 12$ , 可得  $-\frac{1}{2} < x < 3$ ,

当  $x$  满足  $-\frac{1}{2} < x < 3$  时, 必定满足  $-\frac{1}{2} < x < 4$  和  $-1 < x < 6$ ,

而不一定满足  $-\frac{1}{2} < x < 2$  和  $-3 < x < \frac{1}{2}$ , 因此  $-\frac{11}{2} < 5x - 3 < 12$  的

一个必要条件可以是  $-\frac{1}{2} < x < 4$  或  $-1 < x < 6$ , 故选 AD.

### 易错警示

对于充分条件、必要条件的判断, 应首先明确条件与结论分别是什么, 其次判断条件与结论之间的推出关系, 根据当  $A \Rightarrow B$  时,  $A$  是  $B$  的充分条件,  $B$  是  $A$  的必要条件 (此时  $A$  的必要条件是  $B$ ) 来判断, 解题时需要注意题干的叙述.



## 1.5 全称量词与存在量词

## 基础必刷

1. AB 【解析】对于 A, 是存在量词命题, 当  $x=-1$  时, 满足  $x^2-x-2=0$ , 所以 A 是真命题;

对于 B, 是存在量词命题, 15 能同时被 3 和 5 整除, 所以 B 是真命题;

对于 C, 是存在量词命题, 因为所有实数的平方非负, 即  $x^2 \geq 0$ , 所以 C 是假命题;

对于 D, 是全称量词命题, 所以不符合题意. 故选 AB.

2. A 【解析】命题  $p$  的否定为:  $\exists x \geq 1, x^2-x < 0$ . 故选 A.

3. D 【解析】与“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2+1 < 0$ ”表述一致的是“至少有一个实数  $x$ , 使得  $x^2+1 < 0$ ”. 故选 D.

4. AD 【解析】由题意可得, “ $\exists x \in M, x < 0$ ”为真命题, “ $\forall x \in M, x < 3$ ”为真命题, 则应满足的选项为集合  $\{x \mid x < 3\}$  的子集, 且满足“ $\exists x \in M, x < 0$ ”, A, D 选项均满足, B 选项, 当  $x=3$  时不符合“ $\forall x \in M, x < 3$ ”, 故 B 错误, C 选项, 不存在  $x \in M, x < 0$ , 故 C 错误. 故选 AD.

5. ABD 【解析】对于 A, 由存在量词命题的否定形式知, 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, 2x-1 \geq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2x-1 < 0$ ”, A 正确;

对于 B, 当  $x=-1$  时,  $x^2-2x-3=0$  成立, B 正确;

对于 C, 取  $a=-1, b=-2$ , 满足  $a > b$ , 但  $a^2=1 < 4=b^2$ , 因此“ $a > b$ ”不是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件, C 错误;

对于 D,  $x > 2$  能推出  $x > -1$ , 而  $x > -1$  不能推出  $x > 2$ , 所以“ $x > 2$ ”是“ $x > -1$ ”的充分不必要条件, D 正确.

故选 ABD.

6.  $\left\{a \mid -1 \leq a \leq \frac{2}{5}\right\}$  【解析】对于命题  $p$ , 由题意可知,  $5a \leq$

$x^2+2$ , 又  $x^2+2 \geq 2$ , 所以  $5a \leq 2$ , 即  $a \leq \frac{2}{5}$ .

若  $q$  是假命题, 则  $\neg q: \forall x \in \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ , 使得  $ax+a-1 \leq 0$  是真命题,

即  $\begin{cases} -2a+a-1 \leq 0, \\ a+a-1 \leq 0, \end{cases}$  解得  $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$ .

若  $p$  是真命题,  $q$  是假命题, 则  $\begin{cases} a \leq \frac{2}{5}, \\ -1 \leq a \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$  即  $-1 \leq a \leq$

$\frac{2}{5}$ , 因此实数  $a$  的取值范围为  $\left\{a \mid -1 \leq a \leq \frac{2}{5}\right\}$ .

7. 【解】(1) 由题意可得, 关于  $x$  的方程  $x^2-6x+a^2=0$  有解,

所以  $\Delta=36-4a^2 \geq 0$ , 解得  $-3 \leq a \leq 3$ ,

故  $A=\{a \mid -3 \leq a \leq 3\}$ .

(2) 因为  $x \in A$  是  $x \in B$  的必要条件,

所以  $B \subseteq A$ , 又因为  $B$  为非空集合,

所以  $\begin{cases} 3m-2 \leq m-1, \\ 3m-2 \geq -3, \\ m-1 \leq 3, \end{cases}$  解得  $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}$ ,

故实数  $m$  的取值范围为  $\left\{m \mid -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}\right\}$ .

## 刷易错

## 易错点 1 忽视否定的对象而致误

8.  $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{2}{x-3} > 0$  或  $x=3$  【解析】命题  $p$  是一个全称量词命

题, 它的否定是存在量词命题, 其否定为  $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{2}{x-3} > 0$  或  $x=3$ .

## 易错警示

本题的易错之处是忽视已知命题中的结

论, 误认为其否定为  $\frac{2}{x-3} \geq 0$ .

9.  $\exists a, b \in \mathbf{R}$ , 方程  $ax+b=2$  无解或至少有两解 【解析】恰有一解的否定为无解或至少有两解, 因此  $\neg p: \exists a, b \in \mathbf{R}$ , 方程  $ax+b=2$  无解或至少有两解.

## 易错警示

本题中的方程为  $ax+b=2$ , 当  $a \neq 0$  时, 是一次方程, 因此本题的易错之处是误认为恰有一个解的否定是无解, 从而造成错误的写法.

## 易错点 2 不能正确理解否定词而致误

10. 【解】(1) 原命题的否定:  $\exists a \in \mathbf{R}$ , 一元二次方程  $x^2-ax-1=0$  没有实根, 假命题, 因为  $\Delta=a^2+4 > 0$ , 方程恒有实数根.

(2) 原命题的否定: 存在一个正方形不是平行四边形, 假命题, 因为任意一个正方形都是平行四边形.

(3) 原命题的否定:  $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} \notin \mathbf{N}$ , 假命题, 因为  $m=0 \in \mathbf{N}$  时,  $\sqrt{0^2+1}=1 \in \mathbf{N}$ .

## 易错警示

给出一个命题, 先判断命题是全称量词命题

还是存在量词命题, 这是正确写出命题的否定形式的前提, 要注意一些量词的否定, 比如, “都”的否定是“不都”, “全是”的否定是“不全是”, “至少一个”的否定是“一个也没有”. 另一方面, 判断全称量词命题的真假时, 需要对指定集合中的元素逐一判断是否满足条件, 确保都满足条件即为真命题, 反之为假命题. 判断存在量词命题的真假时, 只要指定集合中有一个元素满足条件即为真命题, 反之为假命题. 另外, 原命题与它的否定的真假关系是一真一假, 有时可以利用这一关系, 间接判断所给命题的真假.

# 第一章全章训练

**1. B** 【解析】依题意得,对于集合  $B$  中的元素  $x$ ,满足  $x-1=1,2,3,4,5,7$ ,则  $x$  可能的取值为  $2,3,4,5,6,8$ ,即  $B=\{2,3,4,5,6,8\}$ ,因此  $A \cap B = \{2,3,4,5\}$ . 故选 B.

**2. B** 【解析】对于命题  $p$ :当  $x=0$  时,  $|x+1|=1$ ,故  $p$  为假命题;对于命题  $q$ :当  $x=1$  时,  $x^3=1=x$ ,故  $q$  为真命题. 故选 B.

**3. A** 【解析】当  $x=-1$  时,  $y^2 \leq 2$ ,得  $y=-1,0,1$ ,此时  $A$  中的元素有  $(-1,-1),(-1,0),(-1,1)$ ;

当  $x=0$  时,  $y^2 \leq 3$ ,得  $y=-1,0,1$ ,此时  $A$  中的元素有  $(0,-1),(0,0),(0,1)$ ;

当  $x=1$  时,  $y^2 \leq 2$ ,得  $y=-1,0,1$ ,此时  $A$  中的元素有  $(1,-1),(1,0),(1,1)$ .

综上,集合  $A$  中元素有 9 个. 故选 A.

**4. B** 【解析】该命题是全称量词命题,且该命题的否定:有些菱形不是中心对称图形. 故选 B.

**5. B** 【解析】由题意可知,集合  $A$  中一定包含元素 1,2,一定不包含元素 3,且  $A$  是  $\{1,2,3,4,5\}$  的真子集,所以  $A=\{1,2\}$  或  $\{1,2,4\}$  或  $\{1,2,5\}$  或  $\{1,2,4,5\}$ ,即满足条件的集合  $A$  有 4 个. 故选 B.

**6. B** 【解析】 $a>b$  无法推出  $a-1>b$ ,故 A 错误;

$a>b$  能推出  $a+1>b$ ,故“ $a+1>b$ ”是“ $a>b$ ”的必要条件,且  $a+1>b$  不能推出  $a>b$ ,故“ $a+1>b$ ”不是“ $a>b$ ”的充分条件,故 B 正确;

$a>b$  不能推出  $|a|>|b|$ ,即不能推出  $a^2>b^2$ ,因此选项 C 不是“ $a>b$ ”的必要条件,故 C 错误;

当  $a>0>b$  时无法推出  $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ,故 D 错误. 故选 B.

**7. A** 【解析】由命题“ $\exists m \in \mathbf{R}, A \cap B \neq \emptyset$ ”为假命题,得“ $\forall m \in \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$ ”为真命题,

而  $A=\{x|0 \leq x \leq a\}$ ,  $B=\{x|m^2+3 \leq x \leq m^2+4\}$ ,则  $\forall m \in \mathbf{R}$ ,当  $A=\emptyset$  时,  $a<0$ ,符合题意;当  $A \neq \emptyset$  时,  $0 \leq a < m^2+3$ ,又  $m^2+3 \geq 3$ ,因此  $0 \leq a < 3$ . 所以实数  $a$  的取值范围为  $\{a|a < 3\}$ .

故选 A.

**8. A** 【解析】 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x|x \leq m\}$ ,由于  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$ ,所以  $m \leq 1$ . 故选 A.

**9. ABD** 【解析】对于 A 选项,由题图可知,Ⅰ部分表示  $\complement_U(A \cup B \cup C)$ ,故 A 正确;

对于 B 选项,由题图可知,Ⅱ部分表示  $A \cap B \cap C$ ,故 B 正确;

对于 C 选项,在Ⅲ部分所表示的集合中任取一个元素  $x$ ,则  $x \in B$  且  $x \notin (A \cup C)$ ,故Ⅲ部分表示  $B \cap \complement_U(A \cup C)$ ,故 C 错误;

对于 D 选项,在Ⅳ部分所表示的集合中任取一个元素  $a$ ,则  $a \in (A \cap B)$  且  $a \notin (A \cap B \cap C)$ ,所以Ⅳ部分表示  $(A \cap B) \cap \complement_U(A \cap B \cap C)$ ,故 D 正确. 故选 ABD.

**10. BC** 【解析】由  $a>1$  可得  $\frac{1}{a}<1$ ,所以“ $a>1$ ”是“ $\frac{1}{a}<1$ ”的

充分条件,当  $a=-1$  时,满足  $\frac{1}{a}<1$ ,但得不出  $a>1$ ,所以“ $a>$

1”不是“ $\frac{1}{a}<1$ ”的必要条件,所以“ $a>1$ ”是“ $\frac{1}{a}<1$ ”的充分

不必要条件,故 A 错误;

当  $a=0$  时,方程为  $x+1=0$ ,只有一个解,集合  $A$  中只有一个元素,

当  $a \neq 0$  时,因为集合  $A$  中只有一个元素,所以  $\Delta=1^2-4a=0$ ,解得  $a=\frac{1}{4}$ ,

所以由集合  $A$  中只有一个元素,可得  $a=0$  或  $a=\frac{1}{4}$ ,

所以“ $a=\frac{1}{4}$ ”是“集合  $A=\{x|ax^2+x+1=0\}$  中只有一个元

素”的充分不必要条件,故 B 正确;

若集合  $A=\{1,2\}$ ,  $B=\{1,3\}$ ,此时  $2 \in \{1,2\}$ ,但推不出  $2 \in \{1,2\} \cap \{1,3\}$ ,

所以“ $x \in A$ ”不是“ $x \in A \cap B$ ”的充分条件,

显然  $x \in A \cap B$  能得出  $x \in A$ ,所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in A \cap B$ ”的必要不充分条件,故 C 正确;

由  $x^2-3x+2 \neq 0$ ,可得  $x \neq 1$  且  $x \neq 2$ ,

所以“ $x \neq 1$ ”是“ $x^2-3x+2 \neq 0$ ”的必要不充分条件,故 D 错误. 故选 BC.

**11. ACD** 【解析】根据题意可知,  $A \cap B \cap C$  代表的是除以 3 余数为 2,除以 5 余数为 3,除以 7 余数为 2 的整数.

对于 A,可知  $23 \div 3 = 7 \cdots 2$ ,  $23 \div 5 = 4 \cdots 3$ ,  $23 \div 7 = 3 \cdots 2$ ,故 A 正确;

对于 B,可得  $68 \div 3 = 22 \cdots 2$ ,  $68 \div 5 = 13 \cdots 3$ ,  $68 \div 7 = 9 \cdots 5$ ,不合题意,故 B 错误;

对于 C,可得  $128 \div 3 = 42 \cdots 2$ ,  $128 \div 5 = 25 \cdots 3$ ,  $128 \div 7 = 18 \cdots 2$ ,故 C 正确;

对于 D,易知  $233 \div 3 = 77 \cdots 2$ ,  $233 \div 5 = 46 \cdots 3$ ,  $233 \div 7 = 33 \cdots 2$ ,故 D 正确.

故选 ACD.

**12. {5,6,7}** 【解析】 $\because U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ,  $\complement_U(A \cup B) = \{1,3\}$ ,  $\therefore A \cup B = \{2,4,5,6,7\}$ . 又  $A \cap (\complement_U B) = \{2,4\}$ ,  $\therefore 2 \notin B$  且  $4 \notin B$ ,  $\therefore$  集合  $B = \{5,6,7\}$ .

**13. -2** 【解析】因为  $M = \{2,3,a^2-3a,a+\frac{2}{a}+7\}$ ,  $N = \{a-1,3\}$ ,  $4 \in M$  且  $4 \notin N$ ,若  $a^2-3a=4$ ,解得  $a=4$  或  $a=-1$ ,

当  $a=4$  时,  $a+\frac{2}{a}+7=\frac{23}{2}$ , 此时  $N=\{3,3\}$ , 不满足集合中元素的互异性, 舍去;

当  $a=-1$  时,  $a+\frac{2}{a}+7=-1+\frac{2}{-1}+7=4$ , 此时  $M=\{2,3,4,4\}$ , 不满足集合中元素的互异性, 舍去.

若  $a+\frac{2}{a}+7=4$ , 解得  $a=-1$  (舍去) 或  $a=-2$ ,

当  $a=-2$  时,  $a^2-3a=(-2)^2-3\times(-2)=10$ , 此时集合  $M=\{2,3,10,4\}$ ,  $N=\{-3,3\}$ , 符合题意.

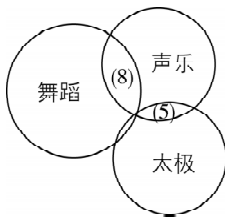
综上,  $a=-2$ , 所以  $a$  的取值集合为  $\{-2\}$ .

14. ②③④ 【解析】如图, 设同时报名舞蹈和报名太极的有  $x$  人,

则  $45+26+33-90=5+8+x$ , 解得  $x=1$ , 所以同时报名舞蹈和报名太极的有 1 人,

只报名舞蹈的有  $45-8-1=36$  (人), 只报名声乐的有  $33-8-5=20$  (人),

报名两门课程的有  $8+5+1=14$  (人).



15. 【解】(1) 由  $-1 \leq x+1 \leq 4$  知  $-2 \leq x \leq 3$ , 且  $x \in \mathbf{N}$  可得,  $A=\{0,1,2,3\}$ ,

所以  $A$  的非空真子集的个数为  $2^4-2=14$ .

(2) 因为  $A \supseteq B$ , 所以若  $B=\emptyset$ , 则  $2m+1 \leq m-1$ , 可得  $m \leq -2$ ;

若  $B \neq \emptyset$ , 则  $\begin{cases} m > -2, \\ -2 \leq m-1, \text{ 解得 } -1 \leq m \leq 1. \\ 2m+1 \leq 3, \end{cases}$

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $\{m \mid -1 \leq m \leq 1 \text{ 或 } m \leq -2\}$ .

16. 【解】(1)  $A=\{x \mid 3 \leq x < 7\}$ ,  $B=\{x \mid 2 < x < 10\}$ ,  $A \cup B=\{x \mid 2 < x < 10\}$ .

(2)  $U=\{x \mid -2 < x < 12\}$ ,  $A=\{x \mid 3 \leq x < 7\}$ ,  $\complement_U A=\{x \mid -2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 12\}$ ,

又  $B=\{x \mid 2 < x < 10\}$ , 所以  $(\complement_U A) \cap B=\{x \mid 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$ .

17. 【解】(1) 当  $m=3$  时,  $A=\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$ , 又  $B=\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ ,

所以  $A \cap B=\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ ,

又  $\complement_{\mathbf{R}} B=\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$ ,

所以  $A \cup \complement_{\mathbf{R}} B=\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$ .

(2) 若选①, 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 所以  $A$  是  $B$  的真子集.

若  $A=\emptyset$ , 则  $m-1 > 2m$ , 解得  $m < -1$ ;

若  $A \neq \emptyset$ , 则  $\begin{cases} m-1 \leq 2m, \\ m-1 \geq 0, \text{ 且等号不能同时成立, 解得 } \\ 2m \leq 3, \end{cases}$

$1 \leq m \leq \frac{3}{2}$ .

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $\left\{m \mid m < -1 \text{ 或 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2}\right\}$ .

若选②, 因为  $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \emptyset$ , 所以  $A \subseteq B$ .

若  $A=\emptyset$ , 则  $m-1 > 2m$ , 解得  $m < -1$ ;

若  $A \neq \emptyset$ , 则  $\begin{cases} m-1 \leq 2m, \\ m-1 \geq 0, \text{ 解得 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2}. \\ 2m \leq 3, \end{cases}$

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $\left\{m \mid m < -1 \text{ 或 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2}\right\}$ .

若选③, 因为  $A \cup B = B$ , 所以  $A \subseteq B$ , 下同选②.

18. 【解】(1) 由  $x^2-(3m-2)x+2m^2-m-3=0$ , 得  $[x-(m+1)] \cdot [x-(2m-3)]=0$ , 所以  $x=m+1$  或  $x=2m-3$ .

因为命题  $p$  为真命题, 所以  $\begin{cases} -5 < m+1 < 4, \\ -5 < 2m-3 < 4, \end{cases}$  解得  $-1 < m < 3$ .

所以  $A=\{m \mid -1 < m < 3\}$ .

(2) 集合  $A=\{m \mid -1 < m < 3\}$ ,  $B=\{m \mid 1-a < m < 1+a\}$ .

由题设可得,  $B$  是  $A$  的真子集.

当  $B=\emptyset$  时,  $1-a \geq 1+a$ , 解得  $a \leq 0$ , 满足题意;

当  $B \neq \emptyset$  时,  $\begin{cases} 1-a < 1+a, \\ 1-a > -1, \text{ 或 } 1-a \geq -1, \text{ 解得 } 0 < a < 2. \\ 1+a \leq 3, \end{cases}$

综上所述,  $a < 2$ . 所以实数  $a$  的取值范围为  $\{a \mid a < 2\}$ .

19. (1) 【解】对于集合  $B=\{0\}$ , 因为  $0+0 \in B$ ,  $0 \times 0 = 0 \in B$ , 所以  $B$  是封闭集.

对于集合  $C=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ,

令  $x_1=2k_1, y_1=2k_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ ,

则  $x_1+y_1=2(k_1+k_2) \in C$ ,  $x_1y_1=4k_1k_2 \in C$ , 所以集合  $C$  是封闭集.

(2) 【解】对于命题  $p$ : 令  $A_1=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A_2=\{x \mid x=3m, m \in \mathbf{Z}\}$ ,

令  $x_1=2n_1, y_1=2n_2, n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ ,

则  $x_1+y_1=2(n_1+n_2) \in A_1$ ,  $x_1y_1=4n_1n_2 \in A_1$ ,

所以集合  $A_1$  是封闭集, 同理可得集合  $A_2$  也是封闭集.

不妨取  $x_2=2, y_2=3$ , 则  $x_2, y_2 \in (A_1 \cup A_2)$ , 而  $x_2+y_2=5 \notin (A_1 \cup A_2)$ ,

因此集合  $A_1 \cup A_2$  不是封闭集, 命题  $p$  是假命题.

对于命题  $q$ : 若  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , 不妨令  $a, b \in (A_1 \cap A_2)$ ,

则有  $a, b \in A_1$ , 又因为集合  $A_1$  是封闭集,

所以  $a+b \in A_1, ab \in A_1$ , 同理可得  $a+b \in A_2, ab \in A_2$ ,

因此  $a+b \in (A_1 \cap A_2), ab \in (A_1 \cap A_2)$ , 所以  $A_1 \cap A_2$  是封闭集.

反之, 若  $A_1 \cap A_2$  是封闭集, 则  $A_1 \cap A_2$  是非空集合, 即  $A_1 \cap$



$A_2 \neq \emptyset$ ,

所以  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  是  $A_1 \cap A_2$  是封闭集的充要条件, 命题  $q$  是真命题.

(3)【证明】若非空集合  $A$  是封闭集,

当  $A = \mathbf{R}$  时,  $\complement_{\mathbf{R}} A = \emptyset$ , 因此  $\complement_{\mathbf{R}} A$  不是封闭集;

当  $A \neq \mathbf{R}$  时, 假设  $\complement_{\mathbf{R}} A$  是封闭集,

不妨设  $0 \in A$ , 在  $\complement_{\mathbf{R}} A$  中任取一个  $x, x \neq 0$ , 则  $-x \in A$ ,

否则若  $-x \in \complement_{\mathbf{R}} A$ , 则此时  $x + (-x) = 0 \in \complement_{\mathbf{R}} A$ , 与  $0 \in A$  矛盾,

因此  $(-x)^2 \in A, x^2 \in \complement_{\mathbf{R}} A$ , 而  $(-x)^2 = x^2$ , 与  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \emptyset$  矛盾,

所以当  $0 \in A$  时,  $\complement_{\mathbf{R}} A$  不是封闭集,

同理当  $0 \in \complement_{\mathbf{R}} A$  时,  $\complement_{\mathbf{R}} A$  不是封闭集.

所以  $A$  的补集不是封闭集.

## 第二章 一元二次函数、方程和不等式

### 2.1 等式

#### 基础必刷

1. D 【解析】对于选项 A, 由等式的性质知, 若  $x = y$ , 则  $x + 5 = y + 5$ , A 正确;

对于选项 B, 若  $a^2 = -2a$ , 则  $a = -2$  或  $a = 0$ , B 正确;

对于选项 C, 由等式的性质知, 若  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ , 则  $a = b$ , C 正确;

对于选项 D, 由等式的性质知, 若  $x = y$ , 则  $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$  的前提条件为  $a \neq 0$ , D 不正确.

故选 D.

2. C 【解析】对于选项 A,  $x^2 - 8xy + 16y^2 = x^2 - 2x \cdot 4y + (4y)^2 = (x - 4y)^2$ , 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 B,  $x(x - y) + y(y - x) = (x - y)^2$ , 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 C,  $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ , 故该选项不正确, 符合题意;

对于选项 D,  $16x^4 - 1 = (4x^2)^2 - 1 = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1)$ , 故该选项正确, 不符合题意. 故选 C.

3. C 【解析】由  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ y - x - m = 0 \end{cases}$  消去  $y$ , 得  $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ , 又

方程组有唯一的一组解, 所以方程  $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$  有两个相等的实数根, 所以  $\Delta = 4m^2 - 4 \times 2 \times (m^2 - 1) = 0$ , 解得  $m = \pm\sqrt{2}$ , 故 C 项正确. 故选 C.

4. A 【解析】设每头牛值金  $x$  两, 每只羊值金  $y$  两,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 2x + 5y = 8, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{34}{21}, \\ y = \frac{20}{21}, \end{cases}$$

所以每头牛值金  $\frac{34}{21}$  两, 每只羊值金  $\frac{20}{21}$  两.

故选 A.

5. D 【解析】由题意得  $-1 + \frac{8}{3} = -\frac{b}{3} \Rightarrow b = -5$ ;  $6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{c}{3} \Rightarrow$

$c = -12$ , 所以  $b + c = -5 - 12 = -17$ . 故选 D.

6. B 【解析】设公共实数根为  $t$ ,

则  $at^2 + bt + c = 0, bt^2 + ct + a = 0, ct^2 + at + b = 0$ ,

三式相加得  $(a + b + c)t^2 + (a + b + c)t + a + b + c = 0$ ,

即  $(a + b + c)(t^2 + t + 1) = 0$ . 因为  $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ ,

所以  $a + b + c = 0$ , 所以  $\frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3}{abc}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a + b)[(a + b)^2 - 3ab] + c^3}{abc} \\ &= \frac{-c(c^2 - 3ab) + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3. \end{aligned}$$

故选 B.

7. -1 【解析】 $\because (3, -2) \in \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} ax + by = 2, \\ bx + ay = -3 \end{cases} \right\}, \therefore \begin{cases} 3a - 2b = 2, \\ 3b - 2a = -3, \end{cases}$

两式相加可得  $a + b = -1$ .

8. 【解】(1) 由  $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow (2x^2 + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ ,

因为  $2x^2 + 1 \neq 0$ , 所以  $x = -\sqrt{3}$  或  $x = \sqrt{3}$ .

所以原方程的解集为  $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ .

(2) 因为  $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3, \text{①} \\ x = 2(y + 1), \text{②} \end{cases}$

将②代入①得  $4(y + 1)^2 + 3y^2 = 3$ ,

整理得  $7y^2 + 8y + 1 = 0$ , 即  $(y + 1)(7y + 1) = 0$ , 解得  $y = -\frac{1}{7}$  或  $y = -1$ .

当  $y = -\frac{1}{7}$  时,  $x = \frac{12}{7}$ ; 当  $y = -1$  时,  $x = 0$ .

所以原方程组的解集为  $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = \frac{12}{7}, \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases} \right\}$ .

#### 刷易错

易错点 1 求方程的解集时要注意方程解的特征

9. D 【解析】由  $\frac{m}{1-x} + 2 = \frac{3}{x-1}$  去分母得  $-m + 2(x - 1) = 3$ , 解得  $x =$

$$\frac{m+5}{2}.$$